

К. Ю. Мазунин

10 класс, МАОУ гимназия №22 г. Калининград

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РАСЧЁТА ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Научные руководители:

Ю.И. Попов — профессор кафедры фундаментальной математики БФУ им. И. Канта, кандидат физико-математических наук.

Актуальность: тема актуальная, так как имеет большое практическое применение в различных областях.

Цель: Изучить практическое применение комплексных чисел для расчета цепей.

Задачи:

- Изучить необходимую литературу.
- Изучить комплексные числа и операции над ними.
- Рассмотреть символический метод расчёта цепей переменного тока.

Введение

Комплексным числом называется выражение вида $z = a + ib$, где $a, b \in R$, а i -мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$. Множество всех комплексных чисел обозначается C .

Всего существует 3 формы записи комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая, показательная.

Комплексное число z , записанное в виде $a + bi$ называется алгебраической формой комплексного числа.

Геометрической формой записи является выражение вида $z = p(\sin \varphi + i \cos \varphi)$, где p — расстояние от точки начала координат до точки радиус-вектора \vec{z} , угол φ между радиус-вектором \vec{z} и положительной полуосью $Ox(Re z)$.

Показательной формой записи является выражение вида $z = p^{i\varphi}$, где p — расстояние от точки начала координат до точки радиус-вектора \bar{z} , угол φ между радиус-вектором \bar{z} и положительной полуосью $Ox(\text{Re } z)$.

$$z = a + bi = p(\sin \varphi + i \cos \varphi) = e^{i\varphi}$$

Рассмотрим применение комплексных чисел для расчёта напряжения в цепи. На использовании комплексных чисел в электротехнике и радиотехнике основан символический метод расчёта цепей переменного тока.

Суть метода

При расчётах цепей переменного тока оперируют не синусоидальными функциями времени, а изображающими их постоянными во времени комплексными числами;

По окончании расчёта возвращаются к обычной форме записи синусоидальных функций.

В символическом методе активно используется запись комплексного числа $a + jb$ в тригонометрической и показательной форме:

$$a + jb = A(\cos \varphi + j \sin \varphi) = Ae^{j\varphi}$$

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа;

Причём $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$, $(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$.

Действия над комплексными числами часто выполняются в показательной форме.

Вводятся следующие обозначения:

r — активное сопротивление;

X_L — индуктивное сопротивление;

X_C — ёмкостное сопротивление;

X_r — реактивное сопротивление;

$$j = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} \text{ — закон Ома,}$$

где \dot{U} — комплексное напряжение;

\dot{Z} — комплексное сопротивление цепи;

j — комплексная сила тока;

При последовательном соединении комплексное сопротивление цепи вычисляется по одной из формул (в зависимости от того, какие сопротивления соединены последовательно):

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= r + jX_L; \\ \dot{Z} &= r - jX_C; \\ \dot{Z} &= r + j(X_L - X_C);\end{aligned}$$

Пример.

Найти закон изменения тока в цепи при последовательном соединении активного и индуктивного сопротивлений, если $r = 1,6$ Ом, $X_L = 1,2$ Ом, $\dot{U} = 340 \sin(\omega t + 1,1)$.

Найдём комплексное сопротивление цепи:

$$\dot{Z} = r + jX_L = 1,6 + 1,2j$$

Перейдём от алгебраической формы записи комплексного напряжения к показательной форме записи:

$$\begin{cases} A = \sqrt{1,6^2 + 1,2^2} = 2 \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1,2}{1,6} \approx 0,64 \text{ рад} \end{cases} \rightarrow \dot{Z} = 2e^{0,64j}$$

Запишем число \dot{U} в показательной форме

$$\dot{U} = 340 \sin(\omega t + 1,1) = 340e^{(\omega t + 1,1)j} = 340e^{1,1j}e^{j\omega t}$$

Тогда по закону Ома будем иметь следующее:

$$j = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{340e^{1,1j}e^{j\omega t}}{2e^{0,64j}} = 170e^{j\omega t}e^{0,46j} = 170e^{(\omega t + 0,46)j}$$

Закон изменения силы тока в цепи выражается мнимой частью числа j , т.е

$$J = 170 \sin(\omega t + 0,46).$$

При этом сдвиг фаз $\varphi = 0,46$ рад $\approx 26^\circ$

Заключение: комплексные числа имеют широкое практическое применение в различных областях наук. К примеру, для расчёта цепей переменного тока.

Список литературы

1. *Примак Н.Н.* Комплексные числа: учебное пособие для курсантов всех специальностей. 1999 г.